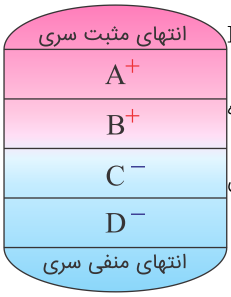
فیزیک

۱

گزینه ۲

باتوجه‌به جایگاه A و F در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی داده شده، صرف‌نظر از اینکه جسم‌های A و F در چه دسته‌بندی قرار گرفته باشند پس از مالش، A مثبت (A^+) و F منفی (F^-) می‌شود. ازطرفی طبق فرض تست، پس از مالش، بار جسم C منفی (C^-) و بار جسم D مثبت (D^+) است؛ بنابراین جدول را می‌توان به‌صورت زیر تکمیل کرد:



باتوجه‌به جدول که در آن بار دو جسم، مثبت $(A^+$ و $D^+)$ و بار دو جسم دیگر منفی $(C^-$ و $F^-)$ است می‌توان نتیجه گرفت که بار جسم‌های B و E باید مختلف العلامه باشند (رد گزینه‌های ۱ و ۴).
باتوجه‌به جدول بالا نتیجه می‌گیریم که E پس از مالش باید منفی شده باشد چراکه اگر فرض کنیم E مثبت شود باید حتماً به F مالش داده شده باشد که در این صورت وضعیت D که مثبت شده است نمی‌تواند رخ دهد و به تناقض می‌رسیم.
و به همین ترتیب B پس از مالش باید مثبت شده باشد چراکه اگر فرض کنیم B منفی شده باشد پس حتماً به A مالش داده شده است که در این صورت C نمی‌تواند منفی شود چراکه بالاتر از جسم‌های دیگر قرار دارد و این بار نیز به تناقض می‌رسیم.

۲

گزینه ۲

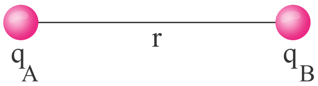
برای حل این تست کافی است تا فاصلهٔ بین دو بار q_1 و q_2 یعنی r را به دست آوریم و در رابطهٔ قانون کولن قرار دهیم:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9}$$
$$= \sqrt{25} = 5\ \text{cm}$$
$$F = \frac{Kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow 36 = \frac{90 \times q(5q)}{25} \Rightarrow q^2 = \frac{36 \times 25}{90 \times 5} = 2$$
$$\Rightarrow q = \pm\sqrt{2}\ \mu\text{C}$$

۳

گزینه ۲

گام اول: ذره با بار $۱۰\,\mu C$ به دو قسمت A و B تقسیم شده است و در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار گرفته‌اند، بنابراین:



$$q_A + q_B = ۱۰\,\mu C \qquad (I)$$

گام دوم: باتوجه‌به میدان الکتریکی دادهٔ شدهٔ هر یک از دو ذره در محل ذرهٔ دیگر، داریم:

$$\left(E_{AB} = \frac{kq_A}{r^۲}\,,\ E_{BA} = \frac{kq_B}{r^۲}\right) \Rightarrow \frac{E_{AB}}{E_{BA}} = \frac{q_A}{q_B} \Rightarrow \frac{۴۰۰۰}{۶۰۰۰} = \frac{q_A}{q_B}$$
$$\Rightarrow q_B = \frac{۳}{۲}q_A \qquad (II)$$

حالا می‌توان با استفاده از دو رابطهٔ (I) و (II)، q_A و q_B را به دست آورد:

$$q_A = ۴\,\mu C \ , \ q_B = ۶\,\mu C$$

گام سوم: با استفاده از رابطهٔ میدان الکتریکی ذرهٔ A در محل ذرهٔ B، فاصلهٔ دو ذره را به دست می‌آوریم:

$$E_{AB} = \frac{kq_A}{r^۲} \Rightarrow ۴۰۰۰ = \frac{۹\times۱۰^۹\times۴\times۱۰^{-۶}}{r^۲} \Rightarrow r^۲ = \frac{۳۶\times۱۰^۳}{۴\times۱۰^۳} = ۹$$
$$\Rightarrow r = ۳\,m$$

۴

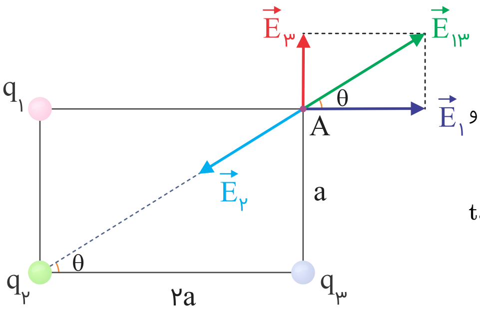
گزینه ۲

اگر میله رسانا باشد بار الکتروسکوپ از طریق میله و بدن شخص که رساناست به زمین انتقال داده می‌شود و برگه‌های الکتروسکوپ به هم می‌چسبند چون در هیچ یک از دو حالت مطرح شده در تست این مسئله اتفاق نمی‌افتد پس نتیجه می‌گیریم که میله نارساناست. چون فاصلهٔ بین برگه‌ها در حالت اول تغییر نمی‌کند پس میلهٔ نارسانا بدون بار است و در حالت دوم چون فاصلهٔ بین برگه‌ها افزایش می‌یابد پس بار میله هم علامت با بار الکتروسکوپ یعنی مثبت است.

۵

گزینه ۱

مطابق شکل زیر میدان در نقطهٔ A در صورتی صفر می‌شود که بار $q_۱$ و $q_۳$ همنام و بار $q_۲$ با این دو بار ناهمنام باشد. بنابراین بردار میدان‌های الکتریکی حاصل از این سه بار در نقطهٔ A را رسم می‌کنیم.



برآیند $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۳$ باید در راستای $\vec{E}_۲$ و در خلاف جهت آن باشد. بنابراین زوایای θ مشخص‌شده در شکل برابرند و داریم:

$$\tan\theta = \frac{E_۳}{E_۱} \ , \ \tan\theta = \frac{a}{۲a}$$

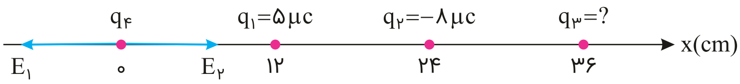
روابط به‌دست‌آمده در قسمت بالا را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{E_۳}{E_۱} = \frac{a}{۲a} \Rightarrow \frac{k\frac{|q_۳|}{a^۲}}{k\frac{|q_۱|}{(۲a)^۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{|q_۳|}{|q_۱|} = \frac{۱}{۸}$$
$$\Rightarrow |q_۳| = \frac{۱}{۸}\times۸ = ۱\,\mu C \xrightarrow{q_۳>۰} q_۳ = +۱\,\mu C$$

۶

گزینه ۲

نیروی الکتریکی وارد بر بار $q_۴$ صفر است. پس میدان خالص حاصل از بارها در محل بار $q_۴$ صفر است. در این صورت می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{aligned} E_۱ &= \frac{k \times ۵}{۱۴۴} \\ E_۲ &= \frac{k \times ۸}{۵۷۶} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_۱ - E_۲ = \frac{۲۰k - ۸k}{۵۷۶} = \frac{۱۲k}{۵۷۶} = \frac{k}{۴۸}$$

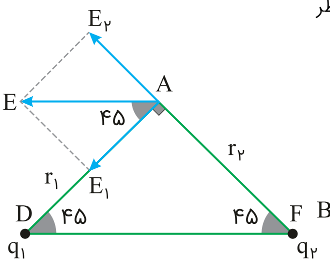
بنابراین میدان حاصل از بار $q_۳$ باید در جهت مثبت محور بوده و مقدار میدان خالص حاصل از دو بار $q_۱$ و $q_۲$ را خنثی کند. پس می‌توان نوشت:

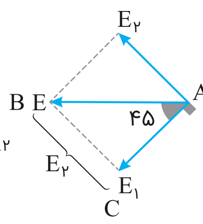
$$E_۳ = \frac{kq_۳}{d^۲} = \frac{k}{۴۸} \Rightarrow \frac{q_۳}{۳۶ \times ۳۶} = \frac{۱}{۴۸} \Rightarrow q_۳ = -۲۷\,\mu C$$

۷

گزینه ۲

باتوجه‌به شکل میدان حاصل از $q_۱$ و $q_۲$ باید به‌صورت زیر باشند تا برآیند بتواند در جهت نشان داده‌شده قرار گیرد. پس $q_۱ < ۰$ و $q_۲ > ۰$ می‌باشد.
در رأس A برآیند با $E_۱$ زاویهٔ ۴۵ درجه ساخته است و از آنجا که $E_۱$ و $E_۲$ بر هم عمود هستند، پس برآیند طبق روش متوازی‌الاضلاع قطر مستطیل است.





پس می‌توان در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC از نسبت‌های مثلثاتی استفاده کرد و با استفاده از $\tan\theta$ در اینجا داریم:

$$\tan ۴۵ = \frac{E_۲}{E_۱} \Rightarrow ۱ = \frac{E_۲}{E_۱} \Rightarrow ۱ = \frac{\frac{\cancel{k}|q_۲|}{r_۲^۲}}{\frac{\cancel{k}|q_۱|}{r_۱^۲}} \Rightarrow ۱ = \frac{r_۱^۲}{r_۲^۲} \times \frac{|q_۲|}{|q_۱|}$$

ازطرفی از آنجا که مثلث ADF متساوی‌الساقین است، پس $r_۱$ با $r_۲$ برابر می‌باشد. درنتیجه داریم:

$$۱ = \frac{\cancel{r_۱^۲}}{\cancel{r_۲^۲}} \times \frac{|q_۲|}{|q_۱|} \Rightarrow ۱ = \frac{|q_۲|}{|q_۱|}$$

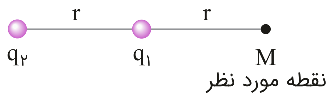
درنتیجه جواب سؤال برابر است با:

$$\frac{q_۲}{q_۱} = -۱$$

۸

گزینه ۴

ابتدا یک مدل فرضی می‌کشیم.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_1+\vec{E}_2=\vec{E}\\ \vec{E}_2=-2\vec{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E}_1-2\vec{E}=\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_1=3\vec{E}$$

پس $\vec{E}_1=-\frac{3}{2}\vec{E}_2$ درنتیجه: $E_1=\frac{3}{2}E_2$

حال با استفاده از رابطهٔ اندازهٔ میدان یعنی $E=\frac{k|q|}{r^2}$ می‌توان نوشت:

$$E_1=\frac{3}{2}E_2 \Rightarrow \frac{k|q_1|}{r^2}=\frac{3}{2}\frac{k|q_2|}{(2r)^2} \Rightarrow \frac{\cancel{k}|q_1|}{\cancel{r^2}}=\frac{3}{2}\frac{\cancel{k}|q_2|}{4\cancel{r^2}}$$

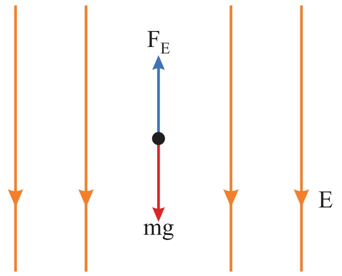
$$\Rightarrow \frac{|q_1|}{1}=\frac{3|q_2|}{2\times 4} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|}=\frac{3}{8}$$

ازطرفی باتوجه‌به $\vec{E}_1=-\frac{3}{2}\vec{E}$ میدان‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ خلاف جهت یکدیگرند درنتیجه بارهای q_1 و q_2 ناهمنام هستند. درنتیجه $\frac{q_1}{q_2}$ برابر $-\frac{3}{8}$ است.

۹

گزینه ۴

یادآوری: می‌دانیم اگر بار منفی در میدان الکتریکی قرار گیرد، جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار مخالف جهت میدان الکتریکی است. در این سؤال چون ذره باردار ساکن است و فقط دو نیرو یکی نیروی وزن و دیگری نیروی الکتریکی بر آن وارد می‌شود، باید این دو نیرو هم‌اندازه و مخالف جهت یکدیگر باشند، چون نیروی وزن رو به پایین است، پس نیروی الکتریکی وارد بر ذره باید رو به بالا باشد و بنابر نکته‌ای که یادآوری شد، جهت میدان الکتریکی رو به پایین است.

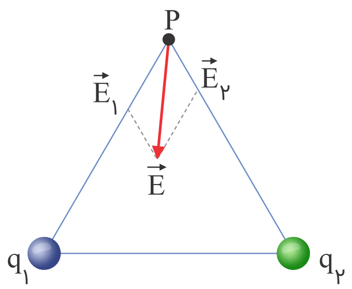


$$F_E=mg \Rightarrow |q|E=mg \Rightarrow E=\frac{10\times 10^{-3}\times 10}{20\times 10^{-3}}=5\,N/C$$

۱۰

گزینه ۲

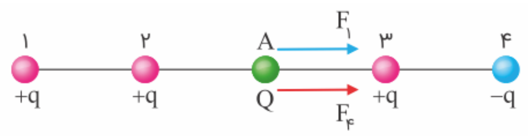
بردار $\vec{E}$ را در دو راستای خط واصل نقطهٔ P و محل بارها تجزیه می‌کنیم تا مؤلفه‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ به دست آیند، چون جهت هردوی آن‌ها به طرف بارها است، نتیجه می‌گیریم هر دو بار منفی‌اند.



۱۱

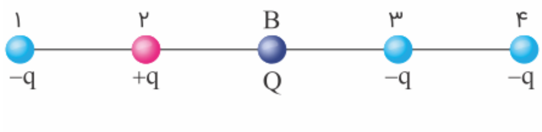
گزینه ۱

در شکل اول، نیروی بار ۲ و ۳ یکدیگر را خنثی و نیروی بار ۱ و ۴ برابر و هم‌جهت هستند.



$$F_۱ = F_۴ = k\frac{qQ}{(۲r)^۲} = \frac{۱}{۴}k\frac{Qq}{r^۲} \Rightarrow F_A = ۲F_۱ = \frac{۱}{۲}k\frac{Qq}{r^۲}$$

در شکل دوم، نیروی بار ۴ و ۱ یکدیگر را خنثی و نیروی بار ۲ و ۳ برابر و هم‌جهت هستند.



$$F_۲ = F_۳ = k\frac{qQ}{r^۲}$$

$$F_B = ۲F_۲ = ۲k\frac{Qq}{r} \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{\frac{۱}{۲}k\frac{Qq}{r^۲}}{۲k\frac{Qq}{r^۲}} = \frac{۱}{۴}$$

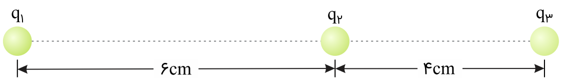
۱۲

گزینه ۱

در این سؤال اندازهٔ یک بار داده شده و اندازهٔ دو بار دیگر مجهول است. ابتدا به خواستهٔ سؤال دقت می‌کنیم که تنها اندازهٔ بار $q_۲$ را از ما می‌خواهد، پس نیازی به محاسبهٔ بار $q_۱$ نداریم، بنابراین باید تنها نیروی وارد بر بار $q_۱$ را محاسبه کنیم، زیرا می‌دانیم نیروی خالص وارد بر بار $q_۱$ صفر است و برای محاسبهٔ نیروی خالص وارد بر هر باری که صفر باشد اندازهٔ خود بار تأثیر و اهمیتی ندارد.

$$\Rightarrow \frac{|q_۲|}{۶^۲} = \frac{۱۲}{۱۰^۲} \Rightarrow |q_۲| = \frac{۳۶ \times ۱۲}{۱۰۰} = ۴/۳۲\,\mu C$$

بار $q_۱$ خارج از ناحیهٔ بین دو بار $q_۲$ و $q_۳$ در تعادل است پس باید $q_۲$ و $q_۳$ ناهم‌علامت باشند: $q_۲ = +۴/۳۲\,\mu C$



۱۳

گزینه ۱

این سؤال را در گام‌های زیر حل می‌کنیم.

گام اول: مقایسهٔ نیروی الکتریکی در فاصله‌های ۸ cm و ۲۴ cm:

$$F = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲} \xrightarrow{q_۲,q_۱\ \text{ثابت}} \frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{F_۱}{F_۱ - ۳۲} = \left(\frac{۲۴}{۸}\right)^۲ \Rightarrow \frac{F_۱}{F_۱ - ۳۲} = ۹$$

$$\Rightarrow F_۱ = ۹F_۱ - ۲۸۸ \Rightarrow F_۱ = ۳۶\,N$$

گام دوم: اگر فرض کنیم، نیروی الکتریکی در فاصلهٔ r' برابر $F' = ۱۴۴\,N$ شود، با مقایسه با نیروی الکتریکی در فاصلهٔ $r = ۸\,cm$ داریم:

$$\frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱۴۴}{۳۶} = \left(\frac{۸}{r'}\right)^۲ \Rightarrow ۴ = \left(\frac{۸}{r'}\right)^۲ \Rightarrow r' = ۴\,cm$$

۱۴

گزینه ۴

چون نیرو در خلاف جهت میدان الکتریکی به ذره وارد شده است، علامت بار ذره منفی است. پس گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست است. اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار برابر است با:

$$F = \sqrt{(۰/۵)^۲ + (۱/۲)^۲} = ۱/۳\,\mathrm{N}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $E = \dfrac{F}{|q|}$، اندازهٔ بار ذره را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{F}{|q|} \Rightarrow ۲ \times ۱۰^۵ = \frac{۱/۳}{|q|} \Rightarrow |q| = ۶/۵ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{C} = ۶/۵\,\mu\mathrm{C}$$
$$\xrightarrow{q<۰} q = -۶/۵\,\mu\mathrm{C}$$

۱۵

گزینه ۲

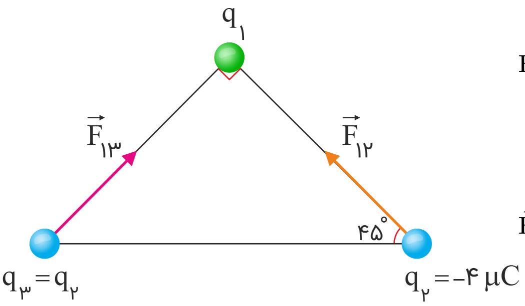
ابتدا نیروی الکتریکی که بار $q_۲$ به بار $q_۳$ وارد می‌کند را به دست می‌آوریم. چون دو بار همنام هستند، یکدیگر را دفع می‌کنند و نیروی $q_۲$ بر بار $q_۳$ خلاف جهت محور x است.

$$\vec{F}_{۲۳} = k\frac{|q_۲|\,|q_۳|}{(r_{۲۳})^۲} = ۹ \times ۱۰^۹ \times \frac{۴ \times ۴ \times ۱۰^{-۱۲}}{(۳ \times ۱۰^{-۱})^۲} = ۱/۶\,\mathrm{N} \Rightarrow \vec{F}_{۲۳} = (-۱/۶\,\mathrm{N})\vec{i}$$

با توجه به نیروی خالص وارد بر بار $q_۳$، نیروی وارد بر بار $q_۳$ از طرف بار $q_۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net(۳)} = \vec{F}_{۱۳} + \vec{F}_{۲۳} \Rightarrow -۰/۲\vec{i} + ۱/۴\vec{j} = \vec{F}_{۱۳} + (-۱/۶\vec{i})$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{۱۳} = ۱/۴\vec{i} + ۱/۴\vec{j}$$

با توجه به تقارن شکل، نیروی الکتریکی وارد بر بار $q_۲$ از طرف بار $q_۱$ را به دست می‌آوریم:



$$\vec{F}_{۱۳} = ۱/۴\vec{i} + ۱/۴\vec{j} \xrightarrow[\text{به تقارن}]{\text{با توجه}} \vec{F}_{۱۲} = -۱/۴\vec{i} + ۱/۴\vec{j}$$

میدان الکتریکی بار $q_۱$ در محل بار $q_۲$ را با استفاده از $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}_۱ = \frac{\vec{F}_{۱۲}}{q_۲} = \frac{-۱/۴\vec{i} + ۱/۴\vec{j}}{-۴ \times ۱۰^{-۶}} = (۳/۵\vec{i} - ۳/۵\vec{j}) \times ۱۰^۵$$

۱۶

گزینه ۲

در یک میدان الکتریکی یکنواخت، خطوط میدان الکتریکی، موازی، مستقیم و هم فاصله هستند پس فقط در شکل‌های "الف" و "هـ" میدان یکنواخت است.

۱۷

گزینه ۱

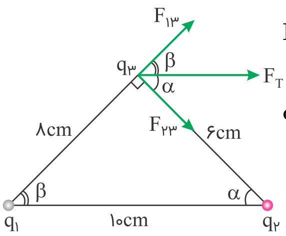
چون برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۱$ صفر است، نیرویی که از طرف بارهای $q_۲$ و $q_۳$ به آن وارد می‌شود، باید در خلاف جهت یکدیگر و باهم هم‌اندازه باشد، بنابراین $q_۲$ و $q_۳$ ناهمنام هستند. (رد گزینهٔ "۲" و "۴") همچنین برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۳$ صفر است، پس داریم:

$$F_{۱۳} = F_{۲۳} \Rightarrow \frac{k|q_۱||q_۳|}{(r+x)^۲} = \frac{k|q_۲||q_۳|}{x^۲} \xrightarrow{|q_۱| = \frac{۹}{۴}|q_۲|} \frac{\frac{۹}{۴}}{(r+x)^۲} = \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow \frac{x}{r} = ۲$$

۱۸ گزینه ۲

نیروی $F_{۲۳}$ جاذبه است، پس برای اینکه برآیند مطابق شکل صورت سؤال باشد، $F_{۱۳}$ باید دافعه باشد که نیروهایی به شکل زیر داشته باشیم. (پس $q_۱$ و $q_۳$ همنام هستند، پس $q_۱$ منفی است)

برآیند نیروهای $F_{۱۳}$ و $F_{۲۳}$ موازی قاعدهٔ مثلث فرض شده است، پس مؤلفه‌های عمودی این نیروها، یعنی $F_{۲۳}\sin\alpha$ و $F_{۱۳}\sin\beta$ با یکدیگر برابر و برآیندشان صفر است.



$$F_{۱۳}\sin\beta = F_{۲۳}\sin\alpha \Rightarrow \cancel{k}\frac{q_۱\cancel{q_۳}}{(۸)^۲}\times\frac{۶}{\cancel{۱۰}} = \cancel{k}\frac{q_۲\cancel{q_۳}}{(۶)^۲}\times\frac{۸}{\cancel{۱۰}}$$

$$q_۱\times\frac{۶}{۶۴} = q_۲\frac{۸}{۳۶} \Rightarrow q_۱ = \frac{۸}{۳۶}\times\frac{۶۴}{۶}\times ۹ = \frac{۶۴}{۳} \xrightarrow{q_۱\text{منفی است}} q_۱ = \frac{-۶۴}{۳}\,\mu C$$

۱۹ گزینه ۲

بررسی عبارت‌ها:

الف) خطوط میدان الکتریکی از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می‌شود. ×

ب) هر جا خطوط میدان الکتریکی متراکم‌تر باشد، بزرگی میدان بیشتر است. ✓

پ) بردار میدان الکتریکی مماس بر خط میدان است. ×

ت) خطوط میدان از اجسام باردار دیگر موجود نیز تأثیر می‌پذیرد. ×

بنابراین سه مورد نادرست بود؛ پس گزینهٔ "۲" پاسخ صحیح است.

۲۰ گزینه ۳

ابتدا بارها برابر است : $q_۱ = q_۲ = q$

نیروی بین دو بار ۱۶ درصد کاهش $\Rightarrow F' = F - \frac{۱۶}{۱۰۰}F = \frac{۸۴}{۱۰۰}F$

$$\left.\begin{array}{l} F' = \frac{۸۴}{۱۰۰}F \Rightarrow k\frac{q'_۱ q'_۲}{d^۲} = \frac{۸۴}{۱۰۰}k\frac{q_۱ q_۲}{d^۲} \\ q'_۱ = q - q_۰ \;,\; q'_۲ = q + q_۰ \end{array}\right\} \Rightarrow (q-q_۰)(q+q_۰) = \frac{۸۴}{۱۰۰}q^۲$$

$$q^۲ + \cancel{q}q_۰ - \cancel{q}q_۰ - q_۰^۲ = \frac{۸۴}{۱۰۰}q^۲ \Rightarrow q_۰^۲ = q^۲ - \frac{۸۴}{۱۰۰}q^۲ \Rightarrow q_۰^۲ = \frac{۱۶}{۱۰۰}q^۲$$

$$\Rightarrow q_۰ = \frac{۴}{۱۰}q \Rightarrow q_۰ = \%۴۰\,q$$

۲۱

گزینه ۴

جعبه ابزار: بحث در وجود ریشه‌ها - خواص توابع درجه دوم
فرمول‌های ضرب و جمع ریشه‌ها (S,P)

$$\begin{cases} y=(m-1)x^2-2 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow (m-1)x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 1+8(m-1)=0 \Rightarrow m=\frac{7}{8}$$

$$8mx^2+7x-3=0 \xrightarrow{m=\frac{7}{8}} 7x^2+7x-3=0$$

$$\Rightarrow S=-\frac{b}{a}=-1$$

$$P=\frac{c}{a}=-\frac{3}{7}$$

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS \Rightarrow -1-\frac{9}{7}=-\frac{16}{7}$$

چالش سوال: توانایی و تسلط بر فرمول‌های P و S درجه ۳ - مساوی قرار دادن دو تابع

۲۲

گزینه ۱

مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که در یک ریشهٔ مشترک هردو برابر صفر شوند. پس ابتدا ریشه‌های یکی را محاسبه کرده و سپس در دیگری قرار می‌دهیم، اگر صدق کرد جواب معادله است.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1\,,\,x=2$$

$$x=1: x^3-x+6=(1)^3-(1)-6\neq 0 \quad \times$$

$$x=2: x^3-x+6=(2)^3-(2)-6=0 \quad \checkmark$$

پس تنها جواب معادله $x=2$ است.

۲۳

گزینه ۱

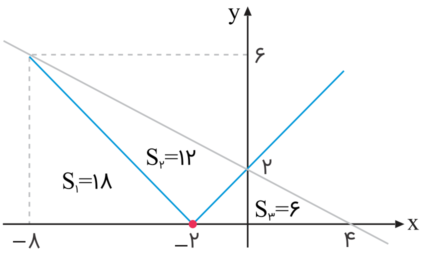
جعبه ابزار: رسم قدرمطلق

$$y=\sqrt{(x+۲)^۲}=|x+۲|=-\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=۲\\x=-۸\Rightarrow y=۶\end{cases}$$

روش اول:

$$S_۱+S_۲+S_۳=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۶=۳۶$$

$$۱۸+S_۲+۶=۳۶\Rightarrow S_۲=۱۲$$



روش دوم: یافتن طول قاعده و ارتفاع مثلث با فرمول فاصله دو نقطه از هم:

$$S_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۲}\times ۶\sqrt{۲}=۱۲$$

چالش سوال: در کنار حل جبری سوال باید به حل به روش هندسی هم چشم داشت تا درک و حل سوال آسان‌تر و سریع‌تر شود.

۲۴

گزینه ۴

$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} \alpha\beta=a^۲ \quad (*)$$

ازطرفی در معادلهٔ داده‌شده می‌دانیم $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ یعنی:

$$\alpha\beta=\frac{۲a-۱}{۱}\xrightarrow{(*)}a^۲=۲a-۱\Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰\Rightarrow a=۱$$

۲۵

گزینه ۳

روش اول:

$$\alpha+\beta=۱\Rightarrow\alpha=۱-\beta,\alpha\beta=-۲$$
$$\Rightarrow(۱-\beta)\beta=-۲\Rightarrow\beta^۲-\beta-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}\beta=۲\Rightarrow\alpha=-۱\\\beta=-۱\Rightarrow\alpha=۲\end{cases}$$

حال با جایگذاری α یا β در معادلهٔ سؤال داریم:

$$-۴+k+۹-۲=۰\Rightarrow ۳+k=۰\Rightarrow k=-۳$$

روش دوم:

نکته: حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ درجه ۳، $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ به صورت $P=\frac{-d}{a}$ و $S=\frac{-b}{a}$ است.

فرض می‌کنیم این معادله ریشهٔ دیگری به نام γ دارد. پس:

$$\alpha\beta\gamma=\frac{۲}{۴}\Rightarrow\alpha\beta\gamma=\frac{۱}{۲}$$

چون می‌دانیم $\alpha\beta=-۲$، پس:

$$\alpha\beta\gamma=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha\beta=-۲}-۲\gamma=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\gamma=\frac{-۱}{۴}$$

ازطرفی می‌دانیم:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-k}{۴}\xrightarrow[\gamma=\frac{-۱}{۴}]{\alpha+\beta=۱}۱+(\frac{-۱}{۴})=\frac{-k}{۴}$$
$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{-k}{۴}\Rightarrow k=-۳$$

۲۶

گزینه ۱

اگر آن عدد مثبت را x فرض کنیم، آنگاه:

$$(\frac{۱}{۳}x+۱)(\frac{۱}{۴}x+۱)=۲۰\Rightarrow\frac{۱}{۱۲}x^۲+\frac{۷}{۱۲}x+۱=۲۰$$
$$\xrightarrow{\times۱۲}x^۲+۷x+۱۲=۲۴۰\Rightarrow x^۲+۷x-۲۲۸=۰$$
$$\Rightarrow x=\frac{-۷\pm\sqrt{۴۹-۴(۱)(-۲۲۸)}}{۲}=\frac{-۷\pm\sqrt{۹۶۱}}{۲}$$
$$\Rightarrow x=\frac{-۷\pm۳۱}{۲}=\begin{cases}x_۱=\frac{۲۴}{۲}=۱۲>۰\\x_۲=\frac{-۳۸}{۲}=-۱۹\ \text{غ.ق.}\end{cases}$$

۲۷

گزینه ۱

$$x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۷x^۳+x^۲=۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۱$$
$$\Rightarrow ۱۰x^۲-۳x=۰\Rightarrow x(۱۰x-۳)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\frac{۳}{۱۰}$$

۲۸

گزینه ۱

$x=\alpha$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند؛ یعنی $۲\alpha^۲-۳\alpha-۷=۰$، پس داریم:

$$۲\alpha^۲-۳\alpha=۷$$

ازطرفی می‌توان نوشت $۲\alpha^۲=۳\alpha+۷$، پس داریم:

$$۲\alpha^۲-۳\alpha+\frac{۲\alpha^۲}{۳\alpha+۷}=۷+۱=۸$$

۲۹ گزینه ۴

$$(x-۲)(x^۲+ax+b)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x^۲+ax+b=۰ \quad (۱) \end{cases}$$

چون معادله یک ریشه $x=۲$ دارد، پس بایستی معادلهٔ (۱) هم فقط یک ریشه $x=۲$ داشته باشد؛ یعنی باید به‌صورت $(x-۲)^۲=۰$ باشد؛ پس:

$$(x-۲)^۲=x^۲+ax+b \Rightarrow x^۲-۴x+۴ \equiv x^۲+ax+b$$

پس $a=-۴$ و $b=۴$ درنتیجه $a+b=۰$.

البته این حل برای یکی از حالت ها است.

۳۰ گزینه ۱

$$\Delta=(۲-\sqrt{۲})^۲-۴(۱)(-\sqrt{۸})=۴-۴\sqrt{۲}+۲+۸\sqrt{۲}=۴+۲+۴\sqrt{۲}=(۲+\sqrt{۲})^۲$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۲-\sqrt{۲})\pm(۲+\sqrt{۲})}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\dfrac{-۲+\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲} \\ x_۲=\dfrac{-۲+\sqrt{۲}-۲-\sqrt{۲}}{۲}=-۲ \end{cases}$$

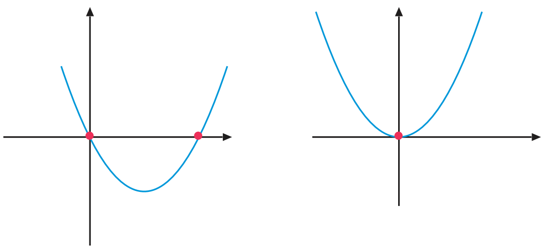
پس $x_۱$ گنگ و $x_۲$ گویا است.

۳۱ گزینه ۱

$$y=ax^۲+(۳+۲a)x=x(ax+۳+۲a)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ax+۳+۲a=۰ \Rightarrow x=-\dfrac{۳+۲a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به‌صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



$$\text{سهمی روبه‌بالا} \Rightarrow a>۰ \quad (*)$$

$$\text{ریشهٔ غیر صفر} >۰ \Rightarrow -\frac{۳+۲a}{a}>۰ \Rightarrow \frac{۳+۲a}{a}<۰$$

$$\xrightarrow{a>۰} ۳+۲a<۰ \Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین طبق $(*)$ برای a مقداری یافت نشد.

۳۲ گزینه ۲

$$\text{از جملات دنباله} \Rightarrow a_۱=-۴\ ,\ a_۵=-۱۶$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow -۴+۴d=-۱۶ \Rightarrow d=-۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d] \xrightarrow{n=۱۴} S_{۱۴}=\frac{۱۴}{۲}[۲(-۴)+۱۳(-۳)] \Rightarrow S_{۱۴}=۷[-۸-۳۹] \Rightarrow S_{۱۴}=-۳۲۹$$

۳۳

گزینه ۱

قرار می‌دهیم: $\sqrt{x-۵}=t$، پس $x=t^۲+۵$ و معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$t+\sqrt{t^۲+۵+۸t}=۷\Rightarrow\sqrt{t^۲+۸t+۵}=۷-t\Rightarrow t^۲+۸t+۵=t^۲-۱۴t+۴۹\Rightarrow ۲۲t=۴۴\Rightarrow t=۲$$

$$\Rightarrow\sqrt{x-۵}=۲\Rightarrow x-۵=۴\Rightarrow x=۹ \text{ ق ق}$$

۳۴

گزینه ۳

$$\begin{cases}a_۶=-۲\\ a_{۱۰}=-\frac{۱}{۸}\end{cases}\Rightarrow\frac{a_۶}{a_{۱۰}}=\frac{-۲}{-\frac{۱}{۸}}\Rightarrow\frac{a_۱r^۵}{a_۱r^۹}=۱۶$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{r^۴}=۱۶\Rightarrow\frac{۱}{r^۴}=۲^۴\Rightarrow r^۴=\frac{۱}{۲^۴}=(\frac{۱}{۲})^۴\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}$$

$$a_۶=-۲\Rightarrow a_۱r^۵=-۲\Rightarrow a_۱(\frac{۱}{۲})^۵=-۲\Rightarrow a_۱=-۲^۶$$

$$S_n=a\frac{۱-r^n}{۱-r}\Rightarrow S_۴=-۲^۶\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^۴}{۱-\frac{۱}{۲}}=-۲^۶\times\frac{\frac{۱۵}{۱۶}}{\frac{۱}{۲}}=-۲^۶\times\frac{۲\times۱۵}{۱۶}=\frac{-۲^۷\times۱۵}{۲^۴}$$

$$\Rightarrow S_۴=-۲^۳\times۱۵=-۱۲۰$$

۳۵

گزینه ۱

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۴}=\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲+۳x-۴}\Rightarrow\frac{x+۴-x+۱}{(x-۱)(x+۴)}=\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲+۳x-۴}\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۵=۰$$

$$\xrightarrow{\text{با استفاده از }\Delta}\Delta=b^۲-۴ac=۹-۴(۲)(-۵)=۴۹\,,\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$x=\frac{۳\pm\sqrt{۴۹}}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}\\ x_۲=-۱\end{cases}\Rightarrow \text{هر دو جواب قابل‌قبولند.}$$

۳۶

گزینه ۲

معادلهٔ درجه دوم به‌صورت $ax^۲+bx+c=۰$ می‌باشد:

$$\begin{cases}a=-۴\\ b=m-۱\\ c=-(m-۳)\end{cases}$$

$$\text{مجموع دو ریشه}:\ S=-\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{-(m-۱)}{-۴}=۲\Rightarrow m-۱=۸\Rightarrow m=۹$$

m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$-۴x^۲+۸x-۶=۰$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}:\ P=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$$

۳۷ گزینه ۲

$$S_{۱۰} = -۳۱ S_۵ \;;\; S_n = a\frac{(۱-r^n)}{۱-r}$$

$$\cancel{a}\frac{(۱-r^{۱۰})}{\cancel{۱-r}} = -۳۱\,\frac{\cancel{a}(۱-r^۵)}{\cancel{۱-r}} \Rightarrow (۱-r^{۱۰}) = -۳۱\,(۱-r^۵)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (۱-r^۵)(۱+r^۵) = -۳۱\,(۱-r^۵) \Rightarrow ۱+r^۵ = -۳۱$$

$$\Rightarrow r^۵ = -۳۲ \Rightarrow r^۵ = (-۲)^۵ \Rightarrow r = -۲$$

۳۸ گزینه ۳

$$\begin{cases} S_۶ = ۴۵ \\ a_۱ - a_۷ = ۹ \end{cases} \Rightarrow S_n = a_۱\frac{۱-r^n}{۱-r} \Rightarrow S_۶ = a_۱\frac{۱-r^۶}{۱-r} \Rightarrow S_۶ = \frac{a_۱ - \overbrace{a_۱r^۶}^{a_۷}}{۱-r}$$

$$\Rightarrow ۴۵ = \frac{۹}{۱-r} \Rightarrow ۱-r = \frac{۹}{۴۵} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow r = \frac{۴}{۵}$$

$$\frac{a_۵}{a_۳} = \frac{a_۱r^۴}{a_۱r^۲} = r^۲ = \left(\frac{۴}{۵}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۵}$$

۳۹ گزینه ۳

$$|۲x-۱| \geq |x-۳| \xrightarrow{\text{توان دو}} (۲x-۱)^۲ \geq (x-۳)^۲$$

$$\Rightarrow (۲x-۱)^۲ - (x-۳)^۲ \geq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیهٔ مزدوج}} ((۲x-۱)-(x-۳))((۲x-۱)+(x-۳)) \geq ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(۳x-۴) \geq ۰$$

x		-۲		$\frac{۴}{۳}$	
p	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x \leq -۲ \text{ یا } x \geq \frac{۴}{۳}$$

جواب نامعادله شامل نقاط صحیح ۱ ,۰ ,۱− = x نمی‌باشد.

۴۰ گزینه ۴

می‌دانیم که $|a+b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < ۰$ بنابراین:

$$|x^۳ + x - ۴| < |x^۳| + |x-۴|$$

$$\xrightarrow{x^۳ = a,\, x-۴ = b} x^۳(x-۴) < ۰$$

x		۰		۴	
p	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow ۰ < x < ۴$$